

# SEMINARIO DE NOTAS TÉCNICAS Y RESERVAS

## USO DE LA ESTIMACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD PARA MUESTRAS PEQUEÑAS Y DE LA SIMULACIÓN EN LA INFERENCIA DE CARTERAS DE SEGUROS

M. en I. JUAN CARLOS VARGAS AGUILAR

Noviembre, 2006

## OBJETIVO:

Mostrar las ventajas del uso de las técnicas de estimación de distribuciones empíricas para muestras pequeñas y de la simulación en la inferencia de carteras de seguros. Aportando así, un método para hacer inferencias de la cartera a pesar de que los datos de ésta no cumplan el supuesto de provenir de una muestra suficientemente grande. Finalmente, ilustrar la aplicación de la metodología propuesta mediante un ejemplo en el que se determina la cuota base para el seguro de Responsabilidad Civil Agentes de Seguros.

**PROBLEMÁTICA  
EN EL SECTOR  
ASEGURADOR:**

La probabilidad empírica o ley de los grandes números, uno de los conceptos más fuertes en la teoría del seguro, asume la existencia de una muestra suficientemente grande pero, ¿cómo debe proceder el asegurador cuando su información estadística es insuficiente? o ¿cómo corregir esta deficiencia para hacer inferencias que causen impacto positivo en la toma de decisiones o en la elaboración de tarifas de seguros?

**IMPORTANCIA  
EN EL SECTOR  
ASEGURADOR:**

El presente trabajo representa una alternativa de solución a la problemática detallada en el punto anterior, permitiendo el desarrollo de inferencias que causen impacto positivo en la toma de decisiones o en la elaboración de tarifas de seguros.

## CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL PLAN

### i.1 Nombre Comercial del Plan

SEGURO DE RESPONSABILIDAD CIVIL AGENTES DE SEGUROS (Personas Físicas).

### i.2 Descripción de la Cobertura Básica

La Compañía se obliga a reparar o, a su elección, indemnizar los daños y perjuicios que el Asegurado cause al público, conforme a la legislación en materia de responsabilidad civil vigente en los Estados Unidos Mexicanos, por actos negligentes o imperitos (errores u omisiones); resultantes de su actividad de agente de seguros, ocurridos y reclamados al Asegurado durante la vigencia de esta póliza, amparándose las siguientes responsabilidades:

- La responsabilidad por daños directos al patrimonio.
- La responsabilidad por pérdida o destrucción de documentos.
- La responsabilidad civil legal personal de los empleados y trabajadores del Asegurado frente al público (quienes se consideraran Asegurados),

### **i.3 Temporalidad del Plan**

La vigencia de este plan puede ser menor o igual a un año.

### **i.4 Operación y Ramo en el que se Registrará**

Este plan se utilizará dentro de las operaciones de DAÑOS, en el ramo de RESPONSABILIDAD CIVIL Y RIESGOS PROFESIONALES.

## **HIPOTESIS ESTADÍSTICAS Y FINANCIERAS**

### **ii.1 Hipótesis Estadísticas**

La información de nuestra cartera para los años 1998, 1999 y 2000 misma que se muestra en los anexos I y II.

### **ii.2 Hipótesis Financieras**

La utilidad mínima esperada es del 5%.

# PROCEDIMIENTOS TÉCNICOS

## iii.1 Gastos de Administración

Los Gastos de Administración considerados serán del 15%.

## iii.2 Gastos de Adquisición

Los Gastos de Adquisición considerados serán del 9%.

## iii.3 Gastos Totales

Gastos Totales = Gastos de Administración + Gastos de Adquisición + Utilidad Técnica.

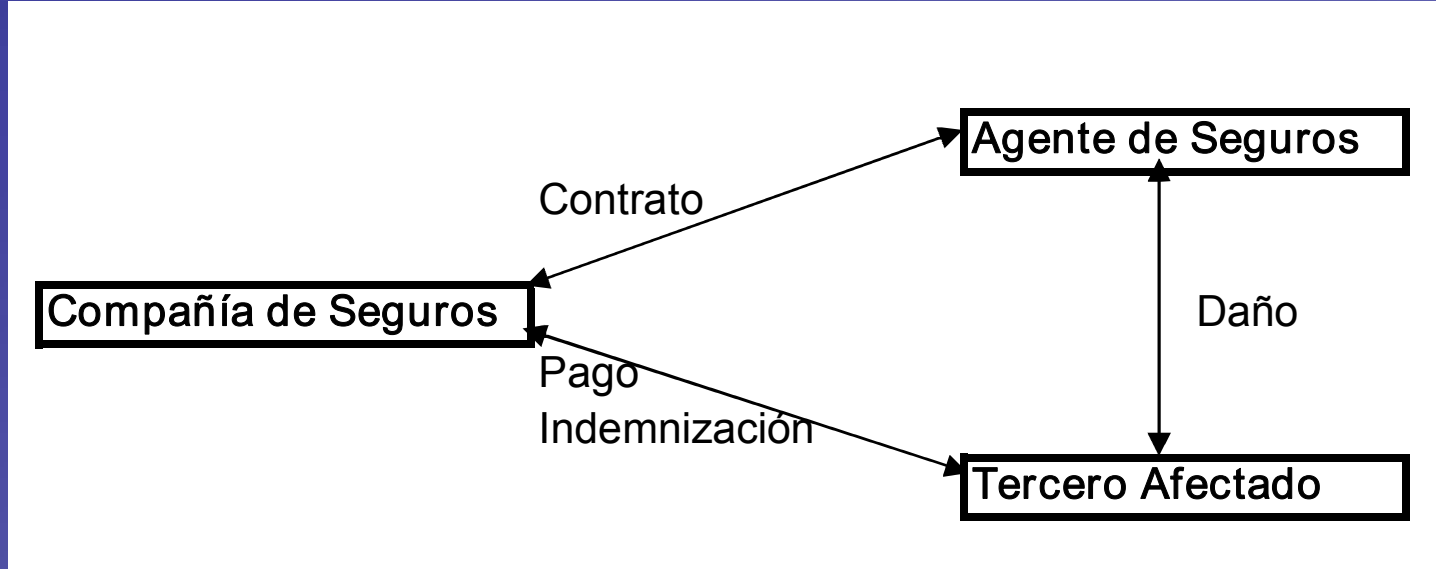
## iii.4 Procedimientos para la Generación de Datos Mediante Simulación Estocástica

- Definición del Sistema.
- Análisis de Datos:
  - Estimar la Distribución de Probabilidad del Volumen de Prima Intermediada por Agente.
  - Estimar la Distribución de Probabilidad Empírica de los Siniestros utilizando el Método del Rango Mediano para Muestras Pequeñas.
  - Determinar las Probabilidades de Siniestro para Diferentes Montos de Prima Intermediada.
- Formulación del Modelo.
- Implementar el Modelo en la Computadora.

- Experimentación.
  - Determinar el Tamaño de Muestra Requerido.
  - Generación de Carteras del Seguro de Responsabilidad Civil Agentes de Seguros (Personas Físicas) Utilizando Simulación Estocástica.
- Interpretación de los Resultados.

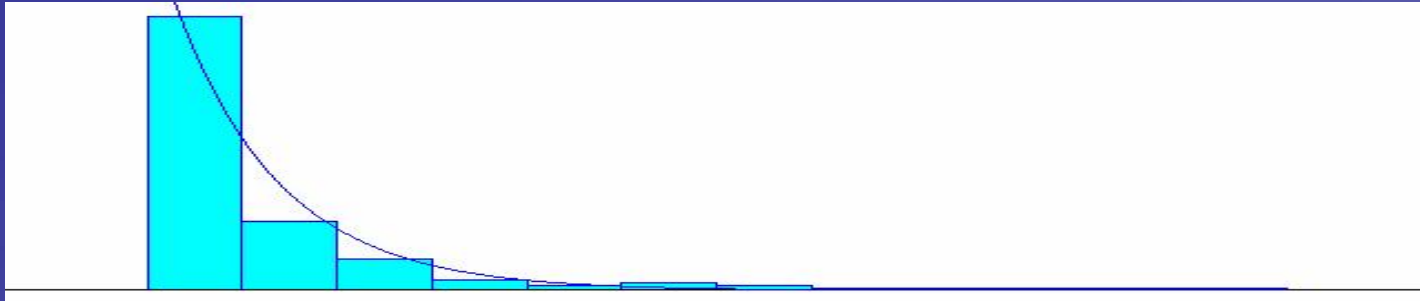
### iii.4.1 Definición del Sistema

#### MODELO DEL SISTEMA



## iii.4.2 Análisis de Datos

### iii.4.2.1 Estimar la Distribución de Probabilidad del Volumen de Prima Intermediada por Agente



$$f(x; \theta) = 0.999 + \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)} & x \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro caso} \end{cases} \quad \text{donde: } \theta = 1'320,000$$

### iii.4.2.2 Estimar la Distribución de Probabilidad Empírica de los Siniestros Utilizando el Método del Rango Mediano para Muestras Pequeñas

SINIESTRO	
AÑO EN QUE SE PRESENTO	MONTO

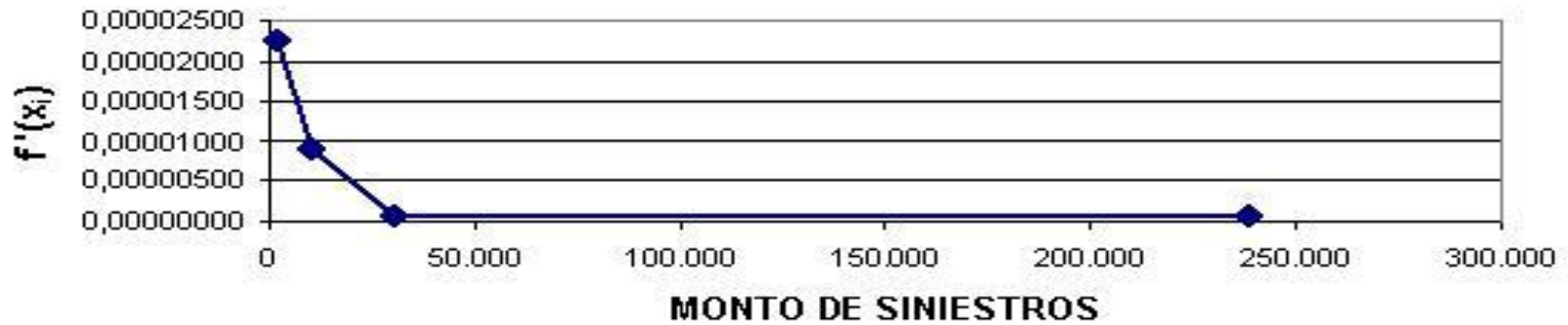
1998	2,000.00
1999	10,250.40
1999	427,845.73
2000	238,501.00
2000	30,404.61

$$F'(x_i) = RM(x_i) = \frac{(i-0.3)}{n+0.4}$$

$$f'(x_i) = \frac{1}{(n+0.4) \times (x_{i+1} - x_i)}$$

ÍNDICE	MONTO	F'(x <sub>i</sub> )	f'(x <sub>i</sub> )
1	2,000.00	0.1796	0.00002245
2	10,250.40	0.3648	0.00000919
3	30,404.61	0.5500	0.00000089
4	238,501.00	0.7352	0.00000098
5	427,845.73	0.9204	

## DISTRIBUCIÓN EMPÍRICA DE SINIESTROS



## PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE

$H_0:$	$vs$	$H_1:$
Los siniestros se distribuyen Gama		Los siniestros no se distribuyen Gama

### Método de Momentos

media = $\bar{x} = 141,800.35 = \alpha\theta$	$\Rightarrow$	$\hat{\theta} = 247,586.69$
Varianza = $s^2 = 35,107,878,306 = \alpha\theta^2$		$\hat{\alpha} = 0.5727301$

# Prueba de Kolmogorov -Smirnov

## PRUEBA DE HIPÓTESIS

Siniestro	F'(xi)	F(xi)	Dn
2.000,00	0,17962963	0,07086374	0,10876589
10.250,40	0,36481481	0,17850845	0,18630636
30.404,61	0,55000000	0,32321123	0,22678877
238.501,00	0,73518519	0,80490556	0,06972038
427.845,73	0,92037037	0,92327200	0,00290163

Dn encontrado	0.227
Dn(α) de Kolmogorov – Smirnov α = 5% (1 - α = 95%)	0.565

$$f(x; \alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde:

$$\hat{\alpha} = 0.5727301$$

$$\hat{\theta} = 247,586.69$$

### iii.4.2.3 Determinar las Probabilidades de Siniestro para Diferentes Montos de Prima Intermediada

Monto Promedio de Prima Intermediada		Probabilidad de Siniestro
Hasta	\$1'500,000.00	0.0217
Mayor a	\$1'500,000.00	0.0732

### iii.4.3 Formulación del Modelo

### iii.4.4 Implementar el Modelo en la Computadora

## SIMULACIÓN

### iii.4.5 Experimentación

#### iii.4.5.1 Determinar el Tamaño de Muestra

	Año		
	1998	1999	2000
Siniestros	1	2	2
Elementos en la cartera	37	39	57
Frecuencia	0,02703	0,05128	0,03509
Frecuencia más Probable	0,03780	≈	2/53

$$n = \frac{z^2 \pi(1 - \pi)}{E^2}$$

$z = 1.96$  (para un intervalo del 95% de confianza)

$$\pi = 0.03780$$

$$E = 0.02617498$$

$$E = S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

$$\hat{p} = 0.03780$$

$$n = 53$$

$$n = 203.6048 \approx 204$$

### iii.4.5.2 Generación de Carteras del Seguro de Responsabilidad Civil Agentes de Seguros (Personas Físicas) Utilizando Simulación Estocástica

#### SIMULACIÓN

### iii.4.6 Interpretación de los Resultados

Clase de Siniestros		Número		Monto	
		Acumulado	Efectivos	Efectivos	Acumulado
\$0	\$10.000	399	71	\$286.092,73	\$57.401.254,00
\$10.000	\$20.000	328	36	\$547.608,06	\$57.115.161,27
\$20.000	\$30.000	292	24	\$593.402,98	\$56.567.553,21
\$30.000	\$40.000	268	20	\$721.006,39	\$55.974.150,23
\$40.000	\$50.000	248	24	\$1.100.897,71	\$55.253.143,83
\$50.000	\$60.000	224	17	\$936.760,75	\$54.152.246,12
\$60.000	\$70.000	207	12	\$766.512,16	\$53.215.485,36
\$70.000	\$80.000	195	9	\$674.462,47	\$52.448.973,21
\$80.000	\$90.000	186	9	\$764.009,36	\$51.774.510,74
\$90.000	\$100.000	177	7	\$662.161,26	\$51.010.501,38
\$100.000	\$200.000	170	62	\$8.765.547,13	\$50.348.340,12
\$200.000	\$300.000	108	43	\$10.515.121,22	\$41.582.793,00
\$300.000	\$400.000	65	29	\$10.013.586,28	\$31.067.671,78
\$400.000	\$500.000	36	11	\$4.909.816,98	\$21.054.085,49
\$500.000	\$600.000	25	14	\$7.559.375,76	\$16.144.268,51
\$600.000	\$700.000	11	5	\$3.244.993,69	\$8.584.892,75
\$700.000	\$800.000	6	3	\$2.263.908,39	\$5.339.899,06
\$800.000	\$900.000	3	1	\$855.760,57	\$3.075.990,68
\$900.000	\$1.000.000	2	0	\$0,00	\$2.220.230,10
\$1.000.000	\$1.100.000	2	1	\$1.053.123,47	\$2.220.230,10
\$1.100.000	\$1.200.000	1	1	\$1.167.106,63	\$1.167.106,63

### iii.5.1 Cálculo de Cuotas sin Deducible

Con base a la siguiente estadística se calculan  $P$ ,  $P_t$ ,  $\tau$  y  $\tau_{\pi?}$  considerando que el valor total del riesgo es de  $\sum_{i=1}^n v_i = 1,081'200,000.00$ , donde  $v = 100,000$  y  $n = 10,812$

Clase		$\sum_{i=1}^m m_i$	$m_i$	$\sum_{i=1}^m s_i$	Acumulados $\sum_{i=1}^m s_i$	$\alpha_i m$	$\alpha_i^2 m$
\$0	\$10.000	399	71	\$286.092,73	\$24.023.088,61	2,8609	0,1886
\$10.000	\$20.000	328	36	\$547.608,06	\$23.736.995,88	5,4761	0,8703
\$20.000	\$30.000	292	24	\$593.402,98	\$23.189.387,81	5,9340	1,4914
\$30.000	\$40.000	268	20	\$691.181,12	\$22.595.984,83	6,9118	2,4025
\$40.000	\$50.000	248	24	\$1.100.897,71	\$21.904.803,71	11,0090	5,0675
\$50.000	\$60.000	224	17	\$936.760,75	\$20.803.905,99	9,3676	5,1779
\$60.000	\$70.000	207	12	\$766.512,16	\$19.867.145,24	7,6651	4,9032
\$70.000	\$80.000	195	9	\$674.462,47	\$19.100.633,08	6,7446	5,0643
\$80.000	\$90.000	186	9	\$764.009,36	\$18.426.170,62	7,6401	6,4921
\$90.000	\$100.000	177	177	\$17.662.161,26	\$17.662.161,26	176,6216	176,2686
						<b>240,2309</b>	<b>207,9262</b>

$$P = \sum_{i=1}^m s_i = 24'023.088.61$$

$$q = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{n} = \frac{240.2309}{10,812} = 0.0222$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = \frac{207.9262}{240.2309} = 0.8655$$

$$\sigma = v \left( \sqrt{nq \left( \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} - q \right)} \right) = 100,000 \sqrt{(10,812)(0.0222)(0.8655 - 0.0222)} = 1'423,336.15$$

$$P_t = P + \sigma = 24'023,088.61 + 1'423,336.15 = 25'446,424.76$$

$$\tau = \frac{P_t}{\sum_{i=1}^n v_i} = \frac{25'446,424.76}{1,081'200,000.00} = 23.54 \text{ ‰}$$

Con base a la siguiente tabla se calcula la cuota de tarifa:

Gastos de Administración =	$\varepsilon_1 =$	15%
Gastos de Adquisición =	$\varepsilon_2 =$	9%
Utilidad Mínima Esperada =	$\varepsilon_4 =$	5%

$$\tau_{\pi} = \frac{\tau}{1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)} = \frac{23.54}{1 - (0.15 + 0.09 + 0.05)} = 33.15\%$$

Finalmente, se construyó una escala de peligrosidad haciendo uso de las probabilidades encontradas en iii.4.2.3, obteniéndose la Tarifa siguiente:

Monto Promedio de Prima Intermediada	Cuota Aplicable al Límite de Responsabilidad \$100,000.00 M. N.	Prima en Pesos M. N.
Hasta \$1'500,000.00	19.23‰	\$1,923.00
Mayor a \$1'500,000.00	64.64‰	\$6,464.00

### iii.5.2 Cálculo de Cuotas con Deducible

Con base a la siguiente estadística se calculan  $P$ ,  $P_t$ ,  $\tau$  y  $\tau_{\pi}$ ? considerando que el

valor total del riesgo es de  $\sum_{i=1}^n v_i = 1,081'200,000.00$ , donde  $v = 100,000$  y  $n = 10,812$

Clase Después de Aplicar Deducible	$\sum_{i=1}^m m_i$	$m_i$	$\sum_{i=1}^m s_i$	Acumulados $\sum_{i=1}^m s_i$	$\alpha_i m$	$\alpha_i^2 m$
\$0 \$2.500	341	13	\$16.985,62	\$21.293.981,50	0,1836	0,0034
\$2.500 \$12.500	328	36	\$277.608,06	\$21.276.995,88	3,0012	0,2938
\$12.500 \$22.500	292	24	\$413.402,98	\$20.999.387,81	4,4692	0,8605
\$22.500 \$32.500	268	20	\$541.181,12	\$20.585.984,83	5,8506	1,7276
\$32.500 \$42.500	248	24	\$920.897,71	\$20.044.803,71	9,9557	4,1503
\$42.500 \$52.500	224	17	\$809.260,75	\$19.123.905,99	8,7488	4,5211
\$52.500 \$62.500	207	12	\$676.512,16	\$18.314.645,24	7,3136	4,4657
\$62.500 \$72.500	195	9	\$606.962,47	\$17.638.133,08	6,5618	4,7955
\$72.500 \$82.500	186	9	\$696.509,36	\$17.031.170,62	7,5298	6,3074
\$82.500 \$92.500	177	177	\$16.334.661,26	\$16.334.661,26	176,5909	176,2116
					<b>230,2052</b>	<b>203,3368</b>

Monto Promedio de Prima Intermediada	Cuota Aplicable al Límite de Responsabilidad \$100,000.00 M. N.	Prima en Pesos M. N.
Hasta \$1'500,000.00	17.10‰	\$1,710.00
Mayor a \$1'500,000.00	57.56‰	\$5,756.00

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La metodología expuesta por esta tesis se ejemplifico con una nota técnica en la que se calculan las cuotas base para el seguro de responsabilidad civil agentes de seguros, producto que carecía de homogeneidad respecto a los precios calculados por diferentes compañías aseguradoras y consecuentemente se observaba la carencia de técnica para extraer el mayor provecho como sea posible a pocos datos.

Mediante el uso de la metodología aquí propuesta, se observó que la tarifa entregada por el reasegurador y la publicada por la otra compañía llevan a números rojos, mientras que la que se desarrolla en este trabajo con el uso de las técnicas propuestas proporciona las consecuencias positivas implícitas de un buen cálculo, hacer frente a los siniestros, utilidad para la empresa y el pago de los gastos de administración y adquisición, observándose que la construcción del modelo y los supuestos del mismo son buenos.

1. La construcción del modelo juega un papel importante en los resultados que se obtengan por el uso de éstas técnicas.
2. Esta metodología sólo puede emplearse por cada riesgo del que se tenga información, aunque ésta sea escasa.
3. Esta metodología sólo puede aplicarse a cada grupo o clase de riesgos de los que se tenga información.
4. Siempre será mejor trabajar con una muestra suficientemente grande, claro que ante la carencia de datos esta metodología es una buena opción.
5. Independientemente de la aplicación final de los datos obtenidos con estas técnicas, tal aplicación debe de ser supervisada una vez puesta en práctica para evitar desvíos respecto a lo planeado y en caso contrario nuevamente estudiar el riesgo para diseñar programas correctivos; esta recomendación constituye un paso obligado independientemente de las técnicas utilizadas.

## FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

1. Carteras de Seguros de Vida
2. Carteras de Seguros de Gastos Médicos Mayores
3. Carteras de Fianzas
4. Cálculos de Reservas en Especial de Riesgos Catastróficos

## BIBLIOGRAFÍA

AGUILAR Juárez, Isabel Patricia y Leonardo BAÑUELOS Saucedo  
Notas del Curso Propedéutico de Probabilidad y Estadística.  
México. Trabajo No publicado. 2002. 97 p

BILLINTON, Roy y Ronald N. ALLAN  
Reliability Evaluation of Engineering Systems Concepts and Techniques. 2nd  
Edition.  
United States of America. Plenum Publishing Corporation. 1992. 453 p.

CANAVOS C. George  
Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos. 1a. Edición.  
[Tr: Edmundo Gerardo Urbina Medal]  
[R. T. Gustavo Javier Valencia Ramírez]  
México. Mc Graw Hill. 1988. 651 p.

COMISIÓN NACIONAL DE SEGUROS Y FIANZAS (CNSF)  
Circular S – 8.1  
México. Diario Oficial de la Federación.  
Febrero 20, 2004.

COSS Bu, Raúl  
Simulación un Enfoque Práctico. 1a Edición.  
México. Editorial Limusa. 1988. 158 p.

ENCICLOPEDIA CIENTÍFICA CULTURAL  
Volumen estadística.  
[Tx: Juan Luis Gutiérrez Duchos]  
España. Cultural S. A. de Ediciones. 1980. 243 p.

HILLER, Frederick S. y Gerald J. LIEBERMAN  
Introducción a la Investigación de Operaciones. 4a. Edición  
[Tr. Marcia A. González Osuna]  
[R. T.  
José Humberto Cantú Delgado  
Perla J. Fernández Reyna  
Marco A. Montufar Benítez]  
México. Mc Graw Hill – Interamericana Editores. 1999. 998 p.

KAZMIER, Leonard J.  
Estadística Aplicada a la Administración y a la Economía. 3a. Edición.  
[R. T. Alejandro Alegría Hernández]  
México. Mc Graw Hill. 1998. 416 p.

KNEZEVIC, Jezdimir

Reliability, Maintainability and Supportability a Probabilistic Approach

United Kingdom. Mc. Graw Hill Book Company Europe. 1993. 291 p.

KREYSZIG, Erwin

Introducción a la Estadística Aplicada Principios y Métodos. 1a. Edición.

[Versión española: Arturo Galán Martínez]

[R. Octavio A. Rascon Chávez]

México. Editorial Limusa. 1979. 505 p.

MARÍN Diazaraque, Juan Miguel

Apuntes de Estadística – Estadística Descriptiva, p. 333

España. Universidad Carlos III de Madrid. 2004.

<http://halweb.uc3m.es/>

MILLER, Irwin, John E. FREUD y Richard A. JOHNSON

Probabilidad y Estadística para Ingenieros. 4a. Edición.

[Tr: Virgilio González Pozo]

[R. T. Graciela Rojas de Finck]

México. Prentice – Hall Hispanoamericana. 1992. 624 p.

SAUTTO Vallejo, José Maclovio

La técnica de la Simulación Digital en la Investigación de Operaciones.

México. Tesis UNAM. 1991. 146 p.

SECRETARÍA DE HACIENDA Y CRÉDITO PÚBLICO

Reglas que Establecen las Orientaciones de Política General Aplicables a los Agentes y Apoderados de Seguros y Fianzas.

México. Diario Oficial de la Federación.

Febrero 27, 2004.

VARGAS Aguilar, Juan Carlos

Fundamentos para el Desarrollo de Productos en Daños

México. Tesis UNAM. 2003. 164 p.

Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros.

Archivo de la CNSF 2001.

México. Diario Oficial de la Federación.

Enero 16, 2002.

*La realidad, es que el uso de nuevas técnicas en campos especializados y con innovadoras exigencias, –como lo es el del seguro– permite la consolidación de vínculos entre estos, cultivando lazos fructíferos en este manantial inextinguible de siempre nuevos conocimientos por aprender.*

¡GRACIAS!